Über die Beziehungen zwischen der Dedekindschen Zahlentheorie und der Theorie der algebraischen Funktionen von Dedekind und Weber

Strobl, Walter

Veröffentlicht in:
Abhandlungen der Braunschweigischen Wissenschaftlichen Gesellschaft Band 33, 1982, S.225-246

Verlag Erich Goltze KG, Göttingen

Über die Beziehungen zwischen der Dedekindschen Zahlentheorie und der Theorie der algebraischen Funktionen von Dedekind und Weber

Von **Walter Strobl,** Kaiserslautern

Ursprünglich ganz unabhängige Gebiete der Mathematik, wie Galoistheorie, Zahlentheorie und Funktionentheorie, können durch die Theorie der algebraischen Funktionen verbunden werden. Eine Beziehung der beiden ersten ist durch die Körpertheorie gegeben, wodurch eine algebraische Sprache als Übergang zum Funktionentheoretischen nahegelegt wird. Unter den verschiedenen Möglichkeiten, die Theorie der algebraischen Funktionen zu entwickeln (je nachdem ob man analytische, algebraisch-geometrische oder arithmetische Methoden benutzt), besitzt die arithmetische Theorie, die jüngste unter ihnen, einen direkten Zusammenhang mit der Zahlentheorie. Und allgemein haben ja mit der Zeit algebraische Beweisführungen das geometrische Bild, das früher in der Arithmetik den Vorrang hatte, ersetzt.

So hat die arithmetische Theorie der algebraischen Funktionen eine besonders interessante Prägung erhalten. Ihr Ursprung ist in zwei grundlegenden Arbeiten von KRONECKER und DEDEKIND–WEBER aus dem Jahr 1882 zu finden.

Die zweifellos bahnbrechenden Methoden, die Kronecker für die Theorie der algebraischen Funktionen mehrerer Veränderlichen entwickelt, sind ebenfalls in der Zahlentheorie anwendbar; sie verlassen aber niemals die Arithmetik. Hiermit erfüllt diese Theorie – mit rechtfertigender Absicht – vollständig die Kroneckerschen Grundsätze der Arithmetisierung der Mathematik.

Die Theorie von Dedekind und Weber scheint weniger anspruchsvoll, weil sie sich von Anfang an auf algebraische Kurven beschränkt; so ist sie zwischen Zahlentheorie und Theorie der algebraischen Flächen einzuordnen. Da aber Dedekind und Weber von der einschränkenden Strenge, mit der Kronecker die Grundlagen der Mathematik betrachtet, frei sind, gebrauchen sie die Arithmetik nur als Ausgangspunkt und sind bereit sie zu verlassen, sobald neue algebraische Begriffe hervortreten. Sie beschreiben insbesondere Strukturen wie Körper, Ring, Modul und Ideal, geben erstmals die abstrakten Definitionen einer Stelle, einer Bewertung, eines Divisors, gewinnen für die Algebra die funktionentheoretische „Idee der Riemannschen Fläche“ und begründen rein formal die Differentialquotienten für algebraische Funktionen. Dedekind und Weber wollten (nur) die Riemannsche Theorie der algebraischen Funktionen allgemein und streng begründen und haben dabei (ohne es sich vorzunehmen) einen der größten Beiträge zu den Grundlagen der „modernen“ algebraischen Geometrie geleistet.

Den allgemeinen Untersuchungen unserer Diplomarbeit über die Dedekind–Weber'sche Abhandlung folgend, wollen wir hier die speziellen Beziehungen, Analogien und Unterschiede zwischen der Zahlentheorie und der arithmetischen Theorie der algebraischen Funktionen beschreiben. Dabei legen wir einen besonderen Wert darauf, die schrittweise Loslösung dieser Theorie von ihrem zahlentheoretischen Ursprung offenzulegen.

Wir beginnen (§§ 1–3) mit einer Beschreibung der historischen Entwicklung der Theorie der algebraischen Funktionen im 19. Jahrhundert. Dabei konzentrieren wir uns zunächst vorwiegend auf die arithmetischen Arbeiten von C. F. GAUSS, L. DIRICHLET und E.E. KUMMER. Hier fällt der Einfluß der „Disquisitiones arithmeticae" von Gauß und der „Vorlesungen über Zahlentheorie" von Dirichlet auf die Theorien von Dedekind–Weber und Kronecker auf. Mit den aufgeführten biographischen Daten möchten wir hauptsächlich die Einwirkungen, Beziehungen und Entwicklungen, die die arithmetische Theorie der algebraischen Funktionen beeinflußt haben, hervorheben. Die historischen Ergebnisse, welche die gemeinsamen Forschungen von Dedekind und Weber betreffen, haben wir aus zum Teil noch unveröffentlichten autographischen Schriftstücken entnommen. Die wichtigsten Vertreter der nicht-arithmetischen Theorien sind in der beigefügten schematischen chronologischen Aufstellung zu finden.

Der systematische Teil unserer Arbeit beginnt mit dem Vergleich des Begriffs der „Klassen von äquivalenten algebraischen Funktionen" von B. RIEMANN (1857) mit den Definitionen des Körpers $\mathbb{K}$ der algebraischen Funktionen nach DEDEKIND–WEBER (1882) und L. KRONECKER (1887) in § 4.

Ist $\mathbb{K}$ als eine endliche algebraische Erweiterung des Körpers $k(z)$ der rationalen Funktionen einer Unbestimmten z (k algebraisch abgeschlossen mit Charakteristik 0) erklärt, so entsteht mit der Definition des Ringes $\mathbb{D}$ der ganzen algebraischen Funktionen das Problem, eine Basis von $\mathbb{D}$ als Modul über dem Polynomring $k[z]$ aus einer Basis von $\mathbb{K}$ über $k(z)$ zu erhalten. Wir fügen dem Dedekind–Weber'schen Beweis der Existenz dieser Basen von $\mathbb{D}$ einen Hilfssatz bei, der die praktische Konstruktion dieser Ganzheits-Basen vereinfachen soll (§ 7).

Als Verallgemeinerung der Norm linearer Abbildungen kann man für jedes Ideal $\mathfrak{p}$ von $\mathbb{D}$ ein Polynom $N(\mathfrak{p})$ in z definieren (die Norm von $\mathfrak{p}$), so daß $\mathfrak{p}$ genau dann prim ist, wenn $N(\mathfrak{p})$ linear in z ist. Auf diese Weise lassen sich alle Prim- bzw. Maximalideale von $\mathbb{D}$ charakterisieren (§ 8).

Wir schließen unsere Arbeit mit der Konstruktion des Verzweigungsideals nach Dedekind und Weber.

Die Einschränkung auf einen algebraisch abgeschlossenen Körper k mit Charakteristik 0 bedarf vielleicht einiger Bemerkungen. Zunächst wäre es ebenfalls möglich, eine (arithmetische) Theorie der algebraischen Funktionen zu entwickeln, wenn k nicht algebraisch abgeschlossen ist; diese würde sich aber in einigen wesentlichen Punkten von der Dedekind–Weber'schen Theorie unterscheiden. So wird z.B. von der algebraischen Abgeschlossenheit von k im Beweis des Fundamentalsatzes, daß die Norm eines Primideals linear ist, Gebrauch gemacht.

Die zweite Bedingung (Charakteristik = 0) macht sich hauptsächlich in der daraus folgenden Separabilität der Erweiterung bemerkbar. Für inseparable Erweiterungen ist die Diskriminante des Körpers $\mathbb{K}$ gleich 0 und die Konstruktion von Normalbasen nach Dedekind und Weber würde entfallen. Die Inseparabilität erschwert auch die Definition des Differentialquotienten. Ferner macht die Dedekind–Weber'sche Beschreibung des Verzweigungsideals von der Eigenschaft Gebrauch, daß der Grundkörper eine nicht-endliche Anzahl von Elementen besitzt.

Die hier zitierten Ausschnitte aus Briefen von H. Weber an R. Dedekind stammen aus den Schriftstücken, die uns freundlicherweise von Prof. Clark Kimberling (Evansville, U.S.A.) zur Verfügung gestellt wurden. Wir möchten uns nochmals dafür bei ihm bedanken.

§ 1. Über die Zahlentheorie im 19. Jahrhundert: Gauß, Dirichlet und Kummer

Der Ausgangspunkt für die Ergebnisse von R. DEDEKIND und H. WEBER, die eine allgemeine Theorie der algebraischen Funktionen einer Variablen begründen, ist in einem der ältesten Zweige der Mathematik zu finden: *in der Zahlentheorie.* Sie gehörte auch zu den Hauptforschungsgebieten dieser Wissenschaft im 19. Jahrhundert. In der ersten Hälfte desselben erfolgte eine Reihe von grundlegenden Entdeckungen für die Zahlentheorie, aber erst mehrere Jahrzehnte später erhielten diese Forschungen ein globales Bild in einer einheitlichen Theorie[1]).

Carl Friedrich GAUSS (1777–1855) veröffentlichte im Jahr 1801 die *Disquisitiones arithmeticae.* In ihnen faßte er nicht nur die bisherigen Ergebnisse aus der Zahlentheorie zusammen, sondern ergänzte sie unter anderem mit der Theorie der Kongruenzen, der quadratischen Formen und Reste. Letztere vervollständigte er später (*Theoria residuorum bicuadratorum; commentatio prima* (1825), *commentatio secunda* (1831)) mit neuen Methoden aus der Theorie der komplexen Zahlen, in einem ausführlichen Studium der Teilbarkeit im Ring $\mathbb{Z}[i]$ der „ganzen Zahlen von Gauß“. Hiermit unterstreicht Gauß den zwischen Zahlentheorie und algebraischen Problemen existierenden Parallelismus und beschreibt unter Anwendung der geometrischen Auslegung der Theorie der ganzen algebraischen Zahlen gleichzeitig die Beziehungen zu den doppeltperiodischen Funktionen. Die Arithmetik erhält auf diese Weise eine neue Ausdrucksform und eine Strenge, die fast bis zur Jahrhundertwende wegweisend für die arithmetisch-algebraischen Forschungen waren.

Mit wenigen Jahren Unterschied arbeitete Adrien Marie LEGENDRE (1752–1833) unabhängig über dieselben Fragen. In seinem *Essai sur la théorie des nombres*

[1]) Diese einheitliche Theorie wird z. B. in D. HILBERT [1] und P. BACHMANN [1] entwickelt. Dirichlet–Dedekinds „Zahlentheorie“ enthält – insbesondere was Dedekinds Supplemente betriff – überwiegend neue Beiträge, so daß der ebenfalls in diesem Werk vorkommende zusammenfassende Charakter zum Teil verdunkelt wird.

(1798, zweite Auflage 1808) behandelte er die wichtigsten Eigenschaften der Zahlen (1816 und 1825 erschienen zwei Supplemente und 1830 eine dritte endgültige Auflage)[2]).

Legendre selbst äußerte seine Achtung und seine Bewunderung gegenüber der Eigenart der Methoden von Gauß, die er in seine „Théorie des nombres" aufnehmen wollte: [3])

> „... Legendre, welcher der höheren Arithemtik einen großen Teil seines Lebens gewidmet hatte, (mußte) bei der zweiten Ausgabe seiner Zahlentheorie gestehen ...: er hätte gern sein Werk mit den Gaußsischen Resultaten (sic) bereichert, aber die Methoden dieses Autors seien so eigenthümlich, daß er ohne die größten Umwege, oder ohne die Rolle eines bloßen Übersetzers zu übernehmen, dieselben nicht hätte wiedergeben können."

Die *Disquisitiones arithmeticae* waren während eines großen Teils des 19. Jahrhunderts das Lehrbuch für viele Mathematiker jener Zeit. Unter ihnen ist Peter Gustav Lejeune DIRICHLET (1805–1859), der Nachfolger von Gauß in Göttingen[4]), besonders hervorzuheben. Das Ergebnis seines ausführlichen und langjährigen Studiums der Disquisitiones ist in seinen *Vorlesungen über Zahlentheorie* zusammengefaßt, in denen er die Gauß'schen arithmetischen Forschungen und Ideen darstellt, erklärt und vervollständigt.

In der von R. Dedekind 1863 erstmals veröffentlichten Form beginnt Dirichlet mit Untersuchungen über die Teilbarkeit und die Kongruenzen der Zahlen, der quadratischen Reste und Formen. Ihnen folgt die Bestimmung der Anzahl der Klassen, in welche die binären quadratischen Formen mit gegebener Determinante zerfallen. Die (Dirichletschen) Supplemente enthalten u.a. Beiträge zur Theorie der Kreisteilung und der endlichen Reihen.

Obwohl Dirichlet keine eigentliche mathematische Schule gründete – wie es z.B. Karl Weierstraß in Berlin tat –, so hatte er doch (hauptsächlich durch seine Lehrtätigkeit) einen bedeutenden Einfluß auf die Mathematik seines Jahrhunderts; insbesondere durch seine Schüler L. Kronecker und G. Eisenstein[5]), B. Riemann[6]), R. Lipschitz[7]) und R. Dedekind, die tief in Dirichlets Gedanken eindrangen.

Trotz dem geringen Altersunterschied hat sich Ernst Eduard KUMMER (1810–1893) immer als Schüler von Dirichlet (und von Gauß) bezeichnet. Um die Nicht-

---

[2]) In F. KLEIN [1], S. 60–62, findet man einen ausführlichen Vergleich zwischen Arbeiten von Legendre und Gauß.

[3]) E.E. KUMMER [3], S. 6.

[4]) Das damalige wissenschaftliche Leben wurde tief durch den Tod von C.F. Gauß (und A.L. Crelle) im Jahr 1855 geprägt. Wie schon gesagt, übernimmt Dirichlet den Lehrstuhl von Gauß, und Kummer tritt Dirichlets Nachfolge in Berlin an. In demselben Jahr kehrt Kronecker nach Berlin zurück, und bald darauf erfolgt die Berufung von Weierstraß in dieselbe Stadt.

[5]) K.-R. BIERMANN [1], S. 20 und 22.

[6]) Dirichlets Nachfolger in Göttingen von 1859 bis zu seinem frühen Tod im Jahr 1866.

[7]) H. MINKOWSKI [1], S. 163.

eindeutigkeit der Primfaktorenzerlegung (die Kummer beim Studium der Kreisteilungskörper vorfand) zu überwinden, adjungierte er sogenannte „ideale Zahlen"[8]) und legte somit den Grundstein für Dedekinds algebraischen Idealbegriff*).

Leopold KRONECKER (1823–1891), Schüler Kummers schon während der Gymnasialzeit, wird die Arbeiten seines Lehrers fortsetzen. Ferner verallgemeinert Richard DEDEKIND (1831–1916) Kummers Ergebnisse über die Eindeutigkeit der Primfaktorenzerlegung in Kreisteilungskörpern auf alle Zahlenkörper. So entsteht die Dedekindsche Idealtheorie, erstmals erschienen als Supplement zur zweiten Auflage der *Vorlesungen über Zahlentheorie* von Dirichlet im Jahr 1871 (L. DIRICHLET [1] oder R. DEDEKIND [1] und [3]).

§ 2. Richard Dedekind und Heinrich Weber

Der Einfluß von Gauß erreichte über Dirichlet und Kummer hinaus auch Richard DEDEKIND. Er war sein letzter Schüler, der unter anderem seine „Methode der kleinsten Quadrate" bis ins hohe Alter weiter lehrte, seine Forschungen fortsetzte und aktiv an der Bearbeitung und Veröffentlichung seiner zahlentheoretischen Werke aus dem Nachlaß mitwirkte[9]).

Ab 1855 traf Dedekind in Göttingen mit *Dirichlet* zusammen, wodurch sein Interesse für die Zahlentheorie noch weiter erweckt wurde. Die kommentierte und erweiterte Dedekindsche Herausgabe der „Vorlesungen über Zahlentheorie" von Dirichlet legte das Fundament, auf das sich die ganze spätere algebraische Zahlentheorie stützen konnte.

Über ihre gemeinsame Privatdozentenzeit in Göttingen hinaus verband R. Dedekind und *B. Riemann* (1826–1866) eine enge Freundschaft. So wurde er auch nach Riemanns Tod mit der Bearbeitung seines Nachlasses beauftragt, und gerade dieser Umstand brachte R. Dedekind und H. Weber zusammen.

Heinrich WEBER (1842–1913) hatte sein Studium in Heidelberg unter anderen bei G.B. Kirchhoff und R. Bunsen begonnen und es in Leipzig bei A.F. Moebius fortgesetzt. Dieser enge Kontakt mit der Physik führte ihn seit seinem ersten Aufenthalt in Königsberg (1863–1865) dazu, sich intensiv mit Riemanns Beiträgen zur mathematischen Physik zu beschäftigen. Der starke Einfluß der Riemannschen Ge-

*) Warum sich Kummer mit der Kreisteilungsarithmetik beschäftigte, wird ausführlich von H. EDWARDS und O. NEUMANN untersucht.

[8]) Vgl. E.E. KUMMER [2] oder O. NEUMANN [1]. Drei Jahre früher (1844) hatte Kummer seine Betrübnis und gleichzeitig seine Hoffnung gegenüber diesem Problem zum Ausdruck gebracht:
„Maxime dolendum videtur, quod haec numerorum realim virtus, ut in factores primos dissolvi possint qui pro eodem numero semper iidem sint, non eadem est numerorum complexorum, quae si esset tota haec doctrina, quae magnis adhuc difficultatibus laborat facile absolvi et ad finem perduci posset." (E.E. KUMMER [1], S. 202)

[9]) Vgl. R. DEDEKIND [2], Bd. 2, S. 293–306 und E. LANDAU [1], S. 64 f.

danken machte sich bei H. Weber auch in seinen rein mathematischen Arbeiten bemerkbar[10]), so daß er bald als einer der tiefsten Kenner der Werke Riemanns galt. Aus diesem Grund übernahm er 1874 (mit Dedekinds Hilfe und auf dessen Bitte) die Herausgabe der Gesammelten Mathematischen Werke Riemanns.

Weber beschäftigte sich auch mit der Zahlentheorie und ihren Beziehungen zu den algebraischen und Abel'schen Funktionen, sowie mit Untersuchungen über die elliptischen Funktionen. Sein großes *Lehrbuch der Algebra* in drei Bänden kann als eine Zusammenfassung seiner arithmetisch-algebraischen Forschungen aufgefaßt werden.

§ 3. Zur Entstehungsgeschichte der Dedekind–Weber'schen Theorie der algebraischen Funktionen

Des öfteren wurde in der Mathematik eine bestimmte Theorie zur gleichen Zeit – mit unterschiedlichen Methoden – durch verschiedene Wissenschaftler entdeckt oder entwickelt. So war es z. B. mit N. I. Lobatschewsky und J. v. Bolyai, N. H. Abel und E. Galois oder A. M. Legendre und C. F. Gauß (vgl. S. 227). In der Theorie der algebraischen Funktionen geschah ähnliches, denn im 92. Band (1882) des „Journals für die reine und angewandte Mathematik" sind zwei ausführliche Abhandlungen zu diesem Thema erschienen: *Grundzüge einer arithmetischen Theorie der algebraischen Grössen* von Leopold KRONECKER (Festschrift zu Kummers Doktor-Jubiläum) und *Theorie der algebraischen Functionen einer Veränderlichen* von Richard DEDEKIND und Heinrich WEBER.

Diese gleichzeitige Veröffentlichung erfolgte aber nicht durch Zufall. Dedekind und Webers Theorie entstand vorwiegend aus ihrem regen Briefwechsel (und einigen mündlichen Besprechungen) von Januar 1879 bis Sommer 1880[11]). Hieraus verfaßte H. Weber die Abhandlung, die er am 22. Oktober 1880 Kronecker zuschickte[12]). Sie wurde aber zurückgehalten, bis Kroneckers „Festschrift" fertiggestellt und gedruckt war[13]). Diese unerwartete Verzögerung leitete später einen Prioritätsstreit ein, zu dem sich Kronecker fast nicht äußert und dem Dedekind ausweicht[14]).

---

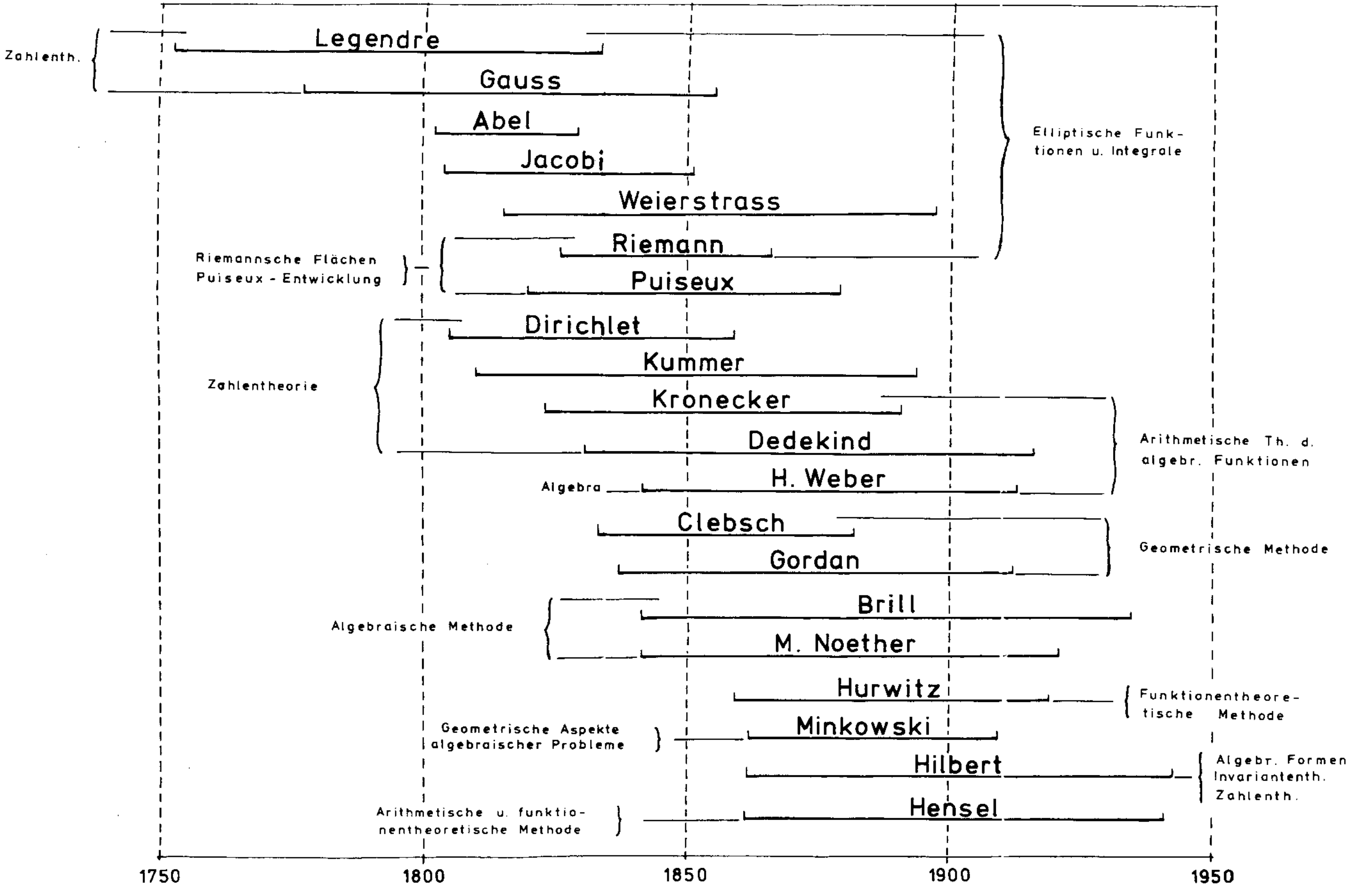
[10]) Insbesondere in Webers „Theorie der Abel'schen Funktionen„; die Riemannsche Schöpfung auf diesem Gebiet hatte er erstmals bei RICHELOT (1808–1875) in Königsberg gehört. (Vgl. W. LOREY [1], S. 96 f.)

[11]) Dies entnimmt man aus zwei Briefen von R. Dedekind an G. Cantor vom 9. 1. 1882 und 17. 2. 1882 (P. DUGAC [1], S. 247 bzw. S. 253).

[12]) Vgl. P. DUGAC [1], S. 253, sowie R. DEDEKIND und H. WEBER [1], S. 184. Der damalige Herausgeber des sogenannten „Crelle's Journal", Carl Wilhelm Borchardt, starb im Juni 1880, und bald darauf übernahm Kronecker (zunächst mit Weierstraß) die Redaktion des Journals.

[13]) Siehe hierzu P. DUGAC [1], S. 247, 249, 252–254 und S. 277 f., aus dem Briefwechsel Cantor–Dedekind bzw. Dedekind–Frobenius.

[14]) Vgl. L. KRONECKER [1], S. 303 f.; P. DUGAC [1], S. 253 f. und S. 280–283, sowie Dedekinds Vorworte zur 3. bzw. 4. Auflage der „Vorlesungen über Zahlentheorie" von Dirichlet. Für eine genauere Erläuterung des Inhaltes und der Hauptergebnisse von Kroneckers Beitrag verweisen wir auf W. STROBL [1], S. 25–30.



Chronologische Darstellung der Entwicklung der Theorie der algebraischen Funktionen im 19. Jahrhundert:

Was den Briefwechsel zwischen R. Dedekind und H. Weber aus dem Zeitraum 1879 bis 1881 betrifft, scheint fast nur noch Webers Anteil erhalten geblieben zu sein. Clark Kimberling fand ihn – zusammen mit weiteren Schriftstücken aus Dedekinds Nachlaß – zufällig 1968 in den Vereinigten Staaten wieder, wohin sie durch Emmy Noethers Übersiedlung in den dreißiger Jahren gekommen waren. Jetzt sind diese Briefe in der Universitätsbibliothek in Evansville (Indiana, U.S.A.) aufbewahrt. Aus den Briefen von Dedekind sind uns zur Zeit lediglich zwei im dritten Band seiner Werke abgedruckten Fragmente und ein Teil eines kurzen Entwurfes aus seinem Nachlaß bekannt. Wir hoffen in einer späteren Arbeit ausführlich auf diesen Briefwechsel zurückzukommen und wollen hier und im Folgenden nur einige Ausschnitte zitieren.

So äußerte sich H. Weber am Anfang ihrer Zusammenarbeit noch sehr zurückhaltend über mögliche Ergebnisse:

> Königsberg, den 5. März 1879
>
> (...)
>
> „Ob die ganze Sache zu etwas Neuem führen wird, müssen wir abwarten. Was wir bis jetzt haben ist im Grunde nicht neu. Immerhin ist es eine sehr elegante und hübsche Ausdrucksweise für bekannte Sätze und genügt insofern einem ästhetischen Bedürfnis. Was ich zunächst davon hoffe ist übrigens eine strenge oder wenigstens allgemeinere Begründung der Riemannschen Theorie."
>
> (...)

Aus damaliger Sicht war wohl der eigentliche Wert dieser Abhandlung kaum einzuschätzen. Die in ihr eingeführten algebraischen Begriffe entfalteten sich zu grundlegenden Gedanken der heutigen algebraischen Geometrie und bilden eine der Quellen des strukturellen Denkens der sogenannten modernen Mathematik.

Den krönenden Abschluß dieser gemeinsamen Forschungen über die Theorie der algebraischen Funktionen bilden wohl folgende Worte aus einem Schreiben von Dedekind an Weber am 30. 10. 1880: [15])

> „Ich benutze die Gelegenheit, um Dir nochmals meinen innigsten Dank für die ganze, beinahe zweijährige Arbeit zu sagen, von der Du so unendlich viel Mühe gehabt hast, und an der Theil zu nehmen mir die größte Freude und eine bedeutende Bereicherung an Wissen gebracht hat; es ist ein ganz besonderes schönes Gefühl, sich so bei der Erforschung der Wahrheit zu begegnen, was Pascal in seinem ersten Brief an Fermat so trefflich ausdrückt: Car je voudrais désormais vous ouvrir mon coeur, s'il se pouvait, tant j'ai de joie de voir notre rencontre. Je vois bien que la vérité est la même à Toulouse et à Paris. Oft habe ich an diese Stelle denken müssen bei den Fortschritten unserer Arbeit, ..."

§ 4. Der Körper der algebraischen Funktionen nach Dedekind–Weber, Kronecker und Riemann

1. Die algebraische Zahlentheorie geht von dem Begriff des Zahlenkörpers als einer endlichen Erweiterung des Körpers $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen aus. DEDEKIND und WEBER betrachten in ihrer Theorie eine endliche algebraische Erweiterung $\mathbb{K}$ eines Körpers rationaler Funktionen (d.h. Quotientenkörper eines Polynomringes, den wir mit k(z) bezeichnen) mit Koeffizienten in einem algebraisch abgeschlossenen

Körper k der Charakteristik 0 in der Unbestimmten z[16]); $\mathbb{K}$ ist *der Körper der algebraischen Funktionen einer Veränderlichen*[17]).

Auf diese Weise sind die algebraischen Kurven im affinen Raum eingebettet, während in der damaligen Zeit vorwiegend der projektive Standpunkt untersucht wurde[18]).

Ein Element θ aus $\mathbb{K}$ erfüllt eine irreduzible algebraische Gleichung

(1) $$F(z,T) = f_0(z)\, T^n + f_1(z)\, T^{n-1} + \ldots + f_{n-1}(z)\, T + f_n(z)$$

mit Polynomen aus k[z] als Koeffizienten, die ohne gemeinsamen Teiler angenommen werden können[19]).

Ist n der Grad der Körpererweiterung $\mathbb{K}$ über k(z), so läßt sich jede algebraische Funktion η aus $\mathbb{K}$ in der Form

(2) $$\eta = a_0 + a_1\, \theta + \ldots + a_{n-1}\, \theta^{n-1}$$

schreiben, wobei die Koeffizienten $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$ rationale Funktionen von z sind; und umgekehrt gehört jede Funktion η, die man in dieser Form darstellen kann, zum Körper $\mathbb{K}$. In diesem Fall sagen wir kurz, daß n der *Grad* von $\mathbb{K}$ ist.

Somit ist $\mathbb{K} = k(z,\theta)$, wobei z und θ der Beziehung $F(z,\theta) = 0$ genügen. Der Transzendenzgrad des Körpers $\mathbb{K}$ in Bezug auf k ist 1, und z ist eine (separable) Transzendenzbasis von $\mathbb{K}$ über k.

2. Diese Beschreibung des Körpers der algebraischen Funktionen einer Veränderlichen ist äquivalent zur Definition von $\mathbb{K}$ über den Quotienten des Polynomringes k[z,T] in den Unbestimmten z und T mit Koeffizienten in k modulo des irreduziblen Polynoms F(z,T).

Die Idee k[z,T]/F(z,T) zu betrachten entstand aus dem Versuch von L. KRONECKER, die algebraischen Begriffe rational bzw. arithmetisch zu behandeln. Er führte diese Definition 1887 ein, und A. Kneser ([1]) und H. Weber ([2]) vervollständigten und wandten sie auf die Körper- und Galoistheorie an[20]).

---

15) R. DEDEKIND [2], Bd. 3, S. 448.

16) Bei Dedekind und Weber ist eigentlich $k = \mathbb{C}$; diese Verallgemeinerung läßt sich aber ohne irgend eine Änderung in ihrer Theorie durchführen.

17) Dedekind selbst führt erstmals die Bezeichnung „Körper" schon zehn Jahre früher ein und begründet dabei diese Namensgebung wie folgt:
„Dieser Name soll, ähnlich wie in den Naturwissenschaften, in der Geometrie, und im Leben der menschlichen Gesellschaft, auch hier ein System bezeichnen, das eine gewisse Vollständigkeit, Vollkommenheit, Abgeschlossenheit besitzt, wodurch es als ein organisches Ganzes, als eine natürliche Einheit erscheint." (R. DEDEKIND [3], S. 20).

18) Vgl. E. SCHOLZ [1], S. 231–236.

19) Im folgenden sei θ ein primitives Element.

20) L. KRONECKER, „Ein Fundamentalsatz der allgemeinen Arithmetik" [2]. Die Tragweite, die Kronecker dieser Definition zuschreibt, kann man aus einem seiner Briefe an F. Casorati (vom 21. 4. 1886) entnehmen:
"Je suis persuadé, qu'on ne peut plus traiter la théorie des fonctions sans recourir à la théorie des nombres; c'est là où l'on trouve les fondements de toutes, les mathématiques comme l'a

3. Zu einer beliebigen nicht konstanten algebraischen Funktion η aus $\mathbb{K} = k(z,\theta)$ erhält man folgendes Diagramm von zwischen k und $\mathbb{K}$ liegenden Körpererweiterungen:

$$\begin{tikzcd}
 & k(z) \arrow[dr, "e"] \arrow[drr, "n"] & & \\
k \arrow[ur] \arrow[dr] & & k(z,\eta) \arrow[r, "f"] & k(z,\theta) = \mathbb{K} \\
 & k(\eta) \arrow[ur, "e_1"] \arrow[urr, "n_1"'] & &
\end{tikzcd}$$

Die Erweiterung $k(z) \subset \mathbb{K}$ ist durch die Gleichung $F(z,\theta) = 0$ n-ten Grades in θ erklärt. Die Funktion η erfüllt eine algebraische Gleichung $G(z,\eta) = 0$ e-ten Grades in η mit Koeffizienten im Polynomring $k[z]$[21]); falls $e = n$, gilt auch $k(z,\eta) = k(z,\theta)$. Sei ferner

$$\overline{F}(\eta;z,\theta) = R(z,\theta) - \eta;$$

dann beschreibt der größte gemeinsame Teiler $D(\eta;z,\theta)$ von $F(z,\theta)$ und $\overline{F}(\eta;z,\theta)$ mit Koeffizienten in $k[z,\eta]$ die Körpererweiterung $k(\eta) \subset \mathbb{K}$, d.h. f ist auch der Grad von D in θ.

Unter diesen Bedingungen existiert das primitive Element ε der Körpererweiterung vom Grad n_1 von $\mathbb{K}$ über $k(\eta)$. Zusammenfassend *gibt es zu jeder nicht konstanten algebraischen Funktion* η *eine weitere Funktion* ε *aus* $\mathbb{K}$, *so daß* $k(\eta,\varepsilon) = k(z,\theta)$; in der Ausdrucksweise von Dedekind und Weber ([1], S. 234) formuliert; man kann z und θ als rationale Funktionen von η und ε ausdrücken (und umgekehrt). Daher kann jede Funktion von $\mathbb{K}$ als unabhängige Variable betrachtet werden und die restlichen als von ihr abhängig. Oder auch: die nur von $\mathbb{K}$ abhängigen Ergebnisse sind invariant bezüglich der Wahl der Unbestimmten z.

Folglich stimmt Dedekind–Webers Definition von $\mathbb{K}$ auch mit RIEMANNs Begriff „einer *Klasse* von algebraischen Funktionen, die sich durch rationale Substitution ineinander überführen lassen: $F(z,\theta) = 0$ und $F_1(z_1,\theta_1) = 0$ gehören zu derselben

---

déjà réconnu '*summus Gauss*'. J'ai aussi trouvé, que toute l'algèbre sera changée en y introduisant les notions arithmétiques, et vous trouvez dans un mémoire, qui paraîtra bientôt, qu'il existe 'un théorème fondamental de l'arithmétique général' à l'aide duquel on peut se passer de la notion de 'quantité algébrique' sans perdre rien de la simplicité des méthodes. Et je sais qu'il existe des théorèmes tout analogues dans l'analyse!" (E. NEUENSCHWANDER [1], S. 51).

[21]) Man erhält $G(z,\eta)$ durch Elimination von θ aus dem Gleichungssystem

$$\begin{cases} F(z,\theta) = 0 \\ R(z,\theta) - \eta = 0 \end{cases}$$

$R(z,\theta)$ ist dabei die Gleichung in z und θ, die nach (2) η erklärt.

Klasse, falls für z und θ rationale Funktionen von z_1 und θ_1 aufzufinden sind, so daß $F(z,\theta)=0$ übergeht in $F_1(z_1,\theta_1)=0$, und daß gleichzeitig z_1 und θ_1 rationale Funktionen von z und θ sind"[22]).

§ 5. Der Dedekindsche Ring der ganzen algebraischen Funktionen

Die Gleichung (1) kann man auch in die folgende Form bringen:

$$F(z,T) = T^n + f_1(z)\,T^{n-1} + \ldots + f_{n-1}(z)\,T + f_n(z) \tag{3}$$

mit (nicht unbedingt ganzen) rationalen Funktionen von z als Koeffizienten.

Hier lassen sich – wie schon im Fall der rationalen Funktionen – diejenigen albraischen Funktionen auszeichnen, die einen endlichen Wert annehmen für endliche Werte der Variablen z. Sie heißen *ganze algebraische Funktionen* von z und sind dadurch charakterisiert, daß die Koeffizienten der Gleichung (3), der sie genügen, *ganze* rationale Funktionen von z sind (d.h. Polynome in z). Den Ring der ganzen algebraischen Funktionen von K bezeichnen wir mit $\mathbb{D}$.

Nach Dedekind und Weber ist ein Ideal $\mathfrak{p}$ von $\mathbb{D}$ ($\mathfrak{p} \neq \mathbb{D}$) prim, falls es in keinem anderen eigentlichen Ideal von $\mathbb{D}$ enthalten ist[23]). Für sie fallen also die heutigen Begriffe des Primideals und des Maximalideals zusammen. Diese Identifizierung ist aber gerade eine charakteristische Eigenschaft der sogenannten *Dedekind-Ringe,* dessen axiomatische Beschreibung erstmals Emmy NOETHER ([2]) durchgeführt hat.

§ 6. Normen, Spuren und Diskriminierung in $\mathbb{K}$

Die Analogie zur Zahlentheorie zeigt sich auch in der Möglichkeit, in der arithmetischen Theorie der algebraischen Funktionen die Begriffe von Norm, Spur und Diskriminante einzuführen.

Sei $\{\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n\}$ eine Basis der Körpererweiterung $\mathbb{K}$ über k(z) und ω eine beliebige algebraische Funktion. Wir erklären die *Norm* und die *Spur* von ω als die Norm und die Spur der linearen Transformation

$$\begin{aligned} m_\omega : \mathbb{K} &\longrightarrow \mathbb{K} \\ \mu &\longrightarrow m_\omega(\mu) = \omega \cdot \mu \end{aligned}$$

Mit anderen Worten: die Norm $N(\omega)$ von ω ist die Determinante der Matrix $A=(a_{ij})$ der Koordinaten der Funktionen $m_\omega(\mu_1), \ldots, m_\omega(\mu_n)$ bezüglich der Basis $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$. Die Spur $S(\omega)$ von ω ist die Summe der Elemente der Diagonale dieser Matrix.

Als *Diskriminante* $\Delta(\mu_1, \ldots, \mu_n)$ eines Systems von n algebraischen Funktionen $\mu_1, \ldots, \mu_n$ (die jetzt keine Basis von K über k(z) zu sein brauchen) bezeichnen wir die Determinante

---

22) Mit dieser Definition von B. RIEMANN [2], S. 133, beginnt das Studium der birationalen Transformationen und ihrer Invarianten (vgl. z. B. E. SCHOLZ [1], Anhang 2).

23) R. DEDEKIND und H. WEBER [1], S. 209.

$$\Delta(\mu_1,\ldots,\mu_n) = \begin{vmatrix} S(\mu_1\cdot\mu_1) & \ldots & S(\mu_1\cdot\mu_n) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ S(\mu_n\cdot\mu_1) & \ldots & S(\mu_n\cdot\mu_n) \end{vmatrix}.$$

Dabei sind die üblichen Eigenschaften von Norm, Spur und Diskriminante erfüllt.

Zum Beispiel *ist die Diskriminante* $\Delta(\mu_1,\ldots,\mu_n)$ *dann und nur dann nicht identisch Null, wenn die Funktionen* $\mu_1,\ldots,\mu_n$ *eine Basis von* $\mathbb{K}$ *bezüglich* $k(z)$ *bilden.*

§ 7. Die Zurückführung einer Basis der Körpererweiterung $\mathbb{K}$ auf eine „Ganzheitsbasis" des Ringes $\mathbb{D}$

Die Modulstruktur ist ein weiterer Begriff, der bereits in Dedekinds (und Kroneckers) Zahlentheorie erscheint, und der ebenfalls auf die Theorie der algebraischen Funktionen übertragbar ist. Er taucht bei Dedekind und Weber in zwei unterschiedlichen Zusammenhängen auf. Erstens bei der Betrachtung des Ringes $\mathbb{D}$ als $k[z]$-Modul (mit dem Beweis der Endlicherzeugbarkeit dieses Moduls) und zweitens bei der Untersuchung der endlichen Untermoduln $M = (\mu_1,\ldots,\mu_s)$ von $\mathbb{K}$ über dem Ring $\mathbb{D}$. Letztere ergeben die sogenannten „gebrochenen Ideale" von $\mathbb{D}$.

Um dies genauer zu beschreiben, machen wir von folgendem (schon von Dedekind und Weber formulierten) Hilfssatz Gebrauch:

Jede algebraische Funktion ω *läßt sich durch Multiplikation mit einer ganzen nicht verschwindenden rationalen Funktion* a *in eine ganze algebraische Funktion überführen.*[24])

Wir können also eine rationale Funktion a von z finden, so daß

$$a\,M = (a\mu_1, a\mu_2,\ldots,a\mu_s)$$

ein Ideal I des Ringes $\mathbb{D}$ ist; somit läßt sich M durch den Quotienten $I:a$ beschreiben. Ferner ist für zwei Ideale A und C von $\mathbb{D}$ die Menge

$$B = \{\beta\in\mathbb{D}/\beta A \subseteq C\} = C : A$$

ebenfalls ein Ideal von $\mathbb{D}$.

Mit obigem Hilfssatz liefert auch jede beliebige Basis $\mu_1,\mu_2,\ldots,\mu_n$ von $\mathbb{K}$ über $k(z)$ eine nur aus *ganzen* algebraischen Funktionen bestehende Basis $\eta_1 = a_1\mu_1, \eta_2 = a_2\mu_2,\ldots,\eta_n = a_n\mu_n$ dieser Erweiterung. Nun zeigten Dedekind und Weber, daß man aus dieser „ganzen" Basis von $\mathbb{K}$ ein endliches Erzeugendensystem von $\mathbb{D}$ als $k[z]$-Modul erhalten kann[25]), die sogenannten *Ganzheitsbasen* von $\mathbb{D}$[26]).

[24]) Erfüllt ω die irreduzible Gleichung

$$a\omega^s + a_1\omega^{s-1} + \ldots + a_{s-1}\omega + a_s = 0$$

mit ganzen rationalen Funktionen als Koeffizienten, so ergibt sich, daß $\mu = a\,\omega$ der Gleichung

$$\mu^s + a_1\,\mu^{s-1} + a_2\,a\,\mu^{s-2} + \ldots + a_{s-2}\,a^{s-3}\,\mu^2 + a_{s-1}\,a^{s-2}\,\mu + a_s\,a^{s-1} = 0$$

genügt. D.h. μ ist in $\mathbb{D}$, denn die Koeffizienten dieser Gleichung sind Polynome in z und inssondere ist der Koeffizient von μ^s gleich 1.

Wir beschreiben kurz diesen Existenzbeweis über das Beispiel des durch die irreduzible Gleichung dritten Grades

(4) $a_0\,\theta^3 + a_1\,\theta^2 + a_2\,\theta + a_3 = 0$

erklärten Körpers. (Dabei sollen a_0, a_1, a_2 und a_3 Polynome in z sein; also ist θ *ganz*, falls a_0 konstant ist, und umgekehrt).

Vermöge der Tschirnhausen-Transformation $\eta = a_0\,\theta + \frac{a_1}{3}$ geht (4) über in

$$\eta^3 + b_1\,\eta + b_0 = 0$$

mit Polynomialkoeffizienten b_1 und b_0. D.h. η ist eine *ganze* algebraische Funktion und $\eta_0 = 1, \eta_1 = \eta, \eta_2 = \eta^2$ ist eine „ganze" Basis von $\mathbb{K}$.

Falls η_0, η_1 und η_2 nicht den k[z]-Modul $\mathbb{D}$ erzeugen, muß es mindestens eine ganze algebraische Funktion der Form

$$\frac{x_0\,\eta_0 + x_1\,\eta_1 + x_2\,\eta_2}{z-c}$$

geben, wobei c konstant und x_0, x_1, x_2 nicht gleichzeitig durch z−c teilbare Polynome aus k[z] sind. Diese Aussage bildet den Kern der Dedekind−Weber'schen Überlegungen. Sei c_0, c_1 und c_2 die kanonische Projektion von x_0, x_1 bzw. x_2 in k[z]/(z−c); dann ist

$$\omega = \frac{c_0\,\eta_0 + c_1\,\eta_1 + c_2\,\eta_2}{z-c}$$

ebenfalls ganz. Unter der Annahme $c_0 \neq 0$ gilt

$$\Delta(\omega, \eta_1, \eta_2) = \frac{1}{(z-c)^2}\begin{vmatrix} c_0 & c_1 & c_2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}\,\Delta(\eta_0, \eta_1, \eta_2) =$$
$$= \frac{c_0^2}{(z-c)^2}\,\Delta(\eta_0, \eta_1, \eta_2).$$ [27])

$\Delta(\omega, \eta_1 \eta_2)$ und $\Delta(\eta_0, \eta_1, \eta_2)$ sind − als Diskriminanten ganzer algebraischer Funktionen − wiederum ganz rational. Also *ist* ω *genau ganz, wenn das Quadrat ihres Zählers* z−c *die Diskriminante von* η_0, η_1, η_2 *teilt.*

Ferner *erzeugt ein System* μ_1, μ_2, μ_3 *ganzer algebraischer Funktionen den* k[z]-*Modul* $\mathbb{D}$, *falls ihre Diskriminante nicht verschwindet und nur einfache lineare Faktoren besitzt*[28]).

Da der Grad von $\Delta(\omega, \eta_1, \eta_2)$ kleiner ist als der Grad von $\Delta(\eta_0, \eta_1, \eta_2)$, liefert der Übergang von der Basis η_0, η_1, η_2 auf das System ω, η_1, η_2 − eventuell nach endlicher Wiederholung des Verfahrens − schließlich eine Ganzheitsbasis von $\mathbb{D}$.

---

[25]) R. DEDEKIND und H. WEBER [1], S. 193 f. Für einen anderen Beweis siehe: B. L. van der WAERDEN [2], Bd. 2, S. 183 f.

[26]) Die Diskriminante einer Ganzheitsbasis nennen wir die *Diskriminante von* $\mathbb{D}$ (oder *von* $\mathbb{K}$ *bzgl.* z) und schreiben $\Delta(\mathbb{D})$ (bzw. $\Delta_z(\mathbb{K})$).

[27]) Falls $c_0 = 0$ und $c_1 \neq 0$ wäre, würden wir analog $\Delta(\eta_0, \omega, \eta_2)$ betrachten.

[28]) Diese beiden Sätze sind unabhängig von der Anzahl der Basisfunktionen.

Die Bestimmung dieser Ganzheitsbasis läßt sich meistens durch folgende Überlegung vereinfachen: Seien y_1 und y_2 die Polynome in z höchsten Grades, die η_1 bzw. η_2 teilen; somit gilt für $\mu_0=\eta_0=1$, $\mu_1=\frac{\eta_1}{y_1}$ und $\mu_2=\frac{\eta_2}{y_2}$, daß

$$\Delta(\mu_0,\mu_1,\mu_2)=\frac{1}{y_1^2\,y_2^2}\,\Delta(\eta_0,\eta_1,\eta_2);$$

und $\Delta(\mu_0,\mu_1,\mu_2)$ enthält im allgemeinen weniger mehrfache Linearfaktoren. Hierzu wollen wir noch bemerken, daß man die Polynome y_1 und y_2 als die Lösung höchsten Grades in z des Kongruenzensystems

$$\begin{cases} S(\eta\ ) \equiv 0 \ (\mathrm{mod.}\ y_1), \\ S(\eta^2) \equiv 0 \ (\mathrm{mod.}\ y_1^2), \\ S(\eta^3) \equiv 0 \ (\mathrm{mod.}\ y_1^3), \end{cases}$$

bzw.

$$\begin{cases} S(\eta^2) \equiv 0 \ (\mathrm{mod.}\ y_2), \\ S(\eta^4) \equiv 0 \ (\mathrm{mod.}\ y_2^2), \\ S(\eta^6) \equiv 0 \ (\mathrm{mod.}\ y_2^3), \end{cases}$$

berechnen kann.

Oder allgemein:

HILFSSATZ.

Sei η eine ganze algebraische Funktion, so daß die Funktionen $1,\eta,\ldots,\eta^{n-1}$ eine Basis der Körpererweiterung $\mathbb{K}$ bzgl. k(z) bilden, und η der Gleichung

$$G(z,T)=T^n+g_1(z)\,T^{n-1}+\ldots+g_{n-1}(z)\,T+g_n(z) \tag{5}$$

genügt, wobei $g_1,\ldots,g_n$ zu k[z] gehören. *Dann ist die ganze rationale Funktion* y *höchsten Grades in* z, *die* η *teilt, die Lösung höchsten Grades in* z *des Kongruenzensystems*

$$\begin{cases} S(\eta\ ) \equiv 0 \ (\mathrm{mod.}\ y\ ), \\ S(\eta^2) \equiv 0 \ (\mathrm{mod.}\ y^2), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ S(\eta^n) \equiv 0 \ (\mathrm{mod.}\ y^n). \end{cases} \tag{6}$$

BEWEIS.

Wir betrachten die algebraische Funktion $\mu=\frac{\eta}{y}$; sie erfüllt die Gleichung

$$\mu^n+\frac{g_1}{y}\,\mu^{n-1}+\ldots+\frac{g_{n-1}}{y^{n-1}}\,\mu+\frac{g_n}{y^n}=0.$$

Die Funktion μ ist ganz, genau dann, wenn die Koeffizienten dieser Gleichung Polynome in z sind; oder gleichbedeutend, wenn y dem Kongruenzensystem

$$\begin{cases} g_1 \equiv 0 \ (\mathrm{mod.}\ y\ ), \\ g_2 \equiv 0 \ (\mathrm{mod.}\ y^2), \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ g_n \equiv 0 \ (\mathrm{mod.}\ y^n), \end{cases} \tag{7}$$

genügt. Schreiben wir $s_i = S(\eta^i)$ mit $i = 1, 2, \ldots, n$, so gilt $g_1 = -s_1$ und (wie leicht nachzurechnen ist) $2\, g_2 = -(s_1 g_1 + s_2)$. Vermöge der Gleichung (5) erhält man rekursiv, daß

$$i\, g_i = -(s_1 g_{i-1} + s_2 g_{i-2} + \ldots + s_{s-1} g_1 + s_i)$$

ist, wobei $g_0 = 1$ und $g_j = 0$ für alle $j < 0$ zu setzen ist.

Somit bestimmen sowohl das System (6) wie auch das System (7) notwendige und hinreichende Bedingungen dafür, daß die algebraische Funktion η durch y teilbar ist, wie zu beweisen war.

Den Dedekind–Weber'schen Ergebnissen ist ferner noch hinzuzufügen, daß *man immer eine der Funktionen einer Ganzheitsbasis von* $\mathbb{D}$ *gleich* 1 *setzen kann*[29]).

§ 8. Die Idealnorm

1. Die Untersuchung der „Teilbarkeit der Ideale“ aus $\mathbb{D}$ wird von Dedekind und Weber mit Hilfe des Begriffs der Norm eines Ideals durchgeführt. In der Definition dieser Norm zeigt sich erstmals ein Unterschied von der Zahlentheorie. Der Grund dafür ist, daß in der Zahlentheorie die Koeffizienten der Gleichungen, die die ganzen algebraischen Zahlen erfüllen, Konstanten sind, während in der arithmetischen Theorie der algebraischen Funktionen die Koeffizienten der Gleichungen, denen die ganzen algebraischen Funktionen genügen, rationale Funktionen in z sind.

So genügt es im Fall der Theorie der algebraischen Funktionen nicht, ein System von Repräsentanten oder Resten modulo des Ideals zu betrachten – wie in der Zahlentheorie –, um die Norm dieses Ideals zu erklären. Durch die Einführung der transzendenten Größe z ist der direkte Weg nicht mehr möglich. Dedekind und Weber überwinden diese Schwierigkeit, indem sie die Norm allgemein über endliche Untermoduln von $\mathbb{K}$ über k definieren[30]).

Seien A und B zwei Ideale von $\mathbb{D}$. Die Funktionen $\mu_1 \mu_2, \ldots, \mu_m$ von B bilden eine *Basis eines vollständigen Restsystems von* B *in Bezug auf* A, wenn jede Funktion β aus B einer *einzigen* Kongruenz der Form

$$\beta \equiv c_1 \mu_1 + c_2 \mu_2 + \ldots + c_m \mu_m \ (\text{mod. } A)$$

mit konstanten Koeffizienten genügt.

Die Beziehungen zwischen den verschiedenen Basen eines vollständigen Restsystems sind analog zu charakterisieren, wie im Fall der Basen von $\mathbb{K}$ bezüglich k(z).

Da $zB = \{z\beta / \beta \in B\} \subset B$ ist, können wir unter diesen Bedingungen $m \cdot m$ Konstanten c_{ij} bestimmen, die das System

[29]) Für den Beweis dieses vereinfachten Satzes siehe W. STROBL [1], S. 59–62, oder auch L. BAUR [1], S. 153.

[30]) Diese endlichen k-Untermoduln von $\mathbb{K}$ nennen sie *Schaaren*.

$$\begin{cases} z\mu_1 \equiv c_{11}\mu_1 + c_{12}\mu_2 + \ldots + c_{1m}\mu_m \pmod{A}, \\ z\mu_2 \equiv c_{21}\mu_1 + c_{22}\mu_2 + \ldots + c_{2m}\mu_m \pmod{A}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ z\mu_m \equiv c_{m1}\mu_1 + c_{m2}\mu_2 + \ldots + c_{mm}\mu_m \pmod{A}, \end{cases}$$

erfüllen. Somit gilt

$$\begin{vmatrix} c_{11}-z & c_{12} & \ldots & c_{1m} \\ c_{21} & c_{22}-z & \ldots & c_{2m} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ c_{m1} & c_{m2} & \ldots & c_{mm}-z \end{vmatrix} \equiv 0 \pmod{A},$$

und wir definieren die *Norm von* A *in Bezug auf* B als die (von der Wahl der Basis unabhängige) ganze rationale Funktion m-ten Grades in z

$$N_B(A) = (-1)^m \begin{vmatrix} c_{11}-z & c_{12} & \ldots & c_{1m} \\ c_{21} & c_{22}-z & \ldots & c_{2m} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ c_{m1} & c_{m2} & \ldots & c_{mm}-z \end{vmatrix}$$

Für $B \subseteq A$ (in Worten: „B *teilbar* durch A") ist $m=0$ und wir setzen $N_B(A)=1$. Gäbe es keine Basis eines vollständigen Restsystems, aus endlich vielen Funktionen bestehend, so ist $N_B(A)=0$ zu nehmen.

Sind ferner $M = A \cap B$ und $D = A+B$, genannt das *kleinste gemeinsame Vielfache* bzw. der *größte gemeinsame Teiler von* A *und* B, so gilt (wie leicht nachzuweisen ist)

$$N_B(A) = N_B(M) = N_D(A),$$

und für drei Ideale A B C von $\mathbb{D}$

$$N_C(A) = N_C(B) \cdot N_B(A).$$

Die *Norm* N(A) *eines Ideals* A von $\mathbb{D}$ ist dann allgemein $N_{\mathbb{D}}(A)$. Der Grad dieser Norm heißt auch *Grad* des Ideals.

Es folgt sofort, daß der Ring $\mathbb{D}$ das einzige Ideal mit Norm 1 ist. Ebenfalls gilt

$$N(A \cdot B) = N(A) \cdot N(B)$$

für zwei Ideale A und B von $\mathbb{D}$.

Die Bezeichnung „Norm eines Ideals" liegt nicht nur wegen der Verallgemeinerung des Normbegriffs einer algebraischen Funktion nahe, sondern auch wegen folgender Beziehung zur „Norm einer Matrix":

Sei $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$ *eine Ganzheitsbasis von* $\mathbb{D}$ *und* A *ein beliebiges eigentliches Ideal von* $\mathbb{D}$. *Dann gibt es eine Basis* $\alpha_1 \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ *von* A, *so daß*

$$\begin{cases} \alpha_1 = a_{11}\mu_1, \\ \alpha_2 = a_{21}\mu_1 + a_{22}\mu_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_n = a_{n1}\mu_1 + a_{n2}\mu_2 + \ldots + a_{nn}\mu_n, \end{cases}$$

mit Koeffizienten a_{ij} *aus* $k[z]$ *und*

$$N(A) = a_{11} \cdot a_{22} \cdot \ldots \cdot a_{nn}$$

ist[31]).

2. Die entscheidende Eigenschaft der Dedekind-Ringe, daß ihre Ideale durch *zwei* Ringelemente erzeugt werden können (wodurch sie als unmittelbare Verallgemeinerung der Hauptidealringe beschrieben werden), drücken Dedekind und Weber in folgendem Satz aus:

Jedes Ideal von $\mathbb{D}$ *ist der größte gemeinsame Teiler zweier Hauptideale.* (DEDEKIND und WEBER [1], S. 213).

Um das konstruktiv zu beweisen, machen sie von dem Hilfssatz Gebrauch, daß für ein Ideal I von $\mathbb{D}$ zu jedem Polynom f(z) aus k[z] eine Funktion μ in I existiert, so daß die Norm $N_I((\mu))$ des Hauptideals (μ) bzgl. I keinen gemeinsamen Teiler mit f(z) hat. In Bezug auf diesen Hilfssatz bemerken sie, daß die Möglichkeit, ihn schon jetzt in ihrer Theorie zu beweisen, einen grundlegenden Unterschied zur Zahlentheorie vorweist und somit erhebliche Vereinfachungen herbeiführt.

Den Grund zu dieser Möglichkeit liefert wiederum, daß $\mathbb{K}$ eine algebraische Körpererweiterung von k(z) ist, während ein (klassischer) Zahlenkörper eine algebraische Erweiterung von $\mathbb{Q}$ ist. Und immer wo dieser Unterschied zum Ausdruck kommt, wird die Analogie zwischen der Zahlentheorie und der arithmetischen Theorie der algebraischen Funktionen aufgehoben.

3. *Die Norm der Primideale in* $\mathbb{D}$. In der Zahlentheorie kann die Norm eines Primideals ganzer algebraischer Zahlen eine positive ganzzahlige ($\neq 1$) Potenz einer „Primzahl" sein. Aber es ist nicht möglich, ein zahlentheoretisches Ergebnis zu finden, das folgender Charakterisierung der Primideale in $\mathbb{D}$, als derjenigen Ideale mit linearer Norm, entspricht.

SATZ.

Ein Ideal in $\mathbb{D}$ *ist genau dann prim, wenn es vom ersten Grad ist* (DEDEKIND und WEBER [1], S. 216 f.).

Hieraus folgt, daß für jedes Primideal $\mathfrak{p}$ in $\mathbb{D}$ ($\mathfrak{p} \neq \mathbb{D}$) mit Norm $N(\mathfrak{p}) = z - c_1$ eine Basis der Art

$$\begin{cases} \beta_1 = z - c_1, \\ \beta_2 = \mu_2 - c_2, \\ \dots\dots\dots\dots \\ \beta_n = \mu_n - c_n, \end{cases}$$

gefunden werden kann, wobei $c_1, c_2, \ldots, c_n$ Konstanten und $\mu_1 = 1$ (vgl. S. 239), $\mu_2, \ldots, \mu_n$ eine Basis von $\mathbb{K}$ bezüglich k(z) sind[32]).

[31]) Für den Beweis siehe W. STROBL [1], S. 66–70. Dedekind und Weber ([1], S. 203–206) zeigen diesen Satz sogar für gebrochene Ideale aus $\mathbb{D}$.

[32]) Siehe W. STROBL [1], S. 76 oder L. BAUR [1], S. 153.

Somit erhalten die Basen der Prim- bzw. Maximalideale in $\mathbb{D}$ eine ähnliche vereinfachte „lineare" Form, wie die Basen der Maximalideale in Polynomringen von $n \geqq 1$ Unbestimmten über einem algebraisch abgeschlossenen Körper nach dem Hilbertschen Nullstellensatz.

§ 9. Das Verzweigungsideal und die Punkte der Riemannschen Fläche

R. Dedekinds guter Freund (und Lehrer) Bernhard RIEMANN (1826–1866) hatte in seinen *Grundlagen für eine allgemeine Theorie der Functionen einer Veränderlichen komplexen Größe* (1851) „mehrblättrige Flächen" als Definitionsbereich analytischer Funktionen eingeführt und sie selbst in der *Theorie der Abelschen Functionen* (1857) für die Behandlung der Integrale von algebraischen Funktionen weiterentwickelt (B. RIEMANN [1], Art. 5 und [2]).

Die Punkte der Riemannschen Fläche – und überhaupt Riemanns Ideen – abstrakt algebraisch zu begründen, ohne von der Stetigkeit und der Reihenentwicklung der algebraischen Funktionen Gebrauch zu machen, war eines der Hauptziele der Arbeit von Dedekind und Weber.

Die Schwierigkeiten, die sie wiederholt in Zusammenhang mit der Definition der Punkte der Riemannschen Fläche vorfanden, waren – wie aus ihrem Briefwechsel hervorgeht – nicht leicht zu überwinden. So findet man z. B. in einem Schreiben an R. Dedekind einen Vorschlag von H. Weber, ihrer arithmetischen Theorie der algebraischen Funktionen eine Form zu geben, die der endgültigen Darstellung sehr nahe kommt:

> Königsberg 18. Dez. 1879
>
> (...)
>
> „Die hauptsächlichste Schwierigkeit erblicke ich nur noch in der Definition des ‚Punktes der R. Fläche' und ich habe in der letzten Zeit mancherlei darauf bezügliche Versuche gemacht, die mich zu der Überzeugung geführt haben, daß es das Beste sein dürfte, zu Deiner ursprünglichen Begründung der Idealtheorie zurückzukehren, wo dann möglichst lange von den Punkten gar nicht die Rede ist, sondern nur von Primidealen. Von da aus würde es dann wohl nicht schwer sein, den Begriff ‚Punkt' in ganz befriedigender Weise einzuführen. Dann würde die Idealtheorie in ihr volles Recht eintreten und der von mir eingeschlagene Weg stellt sich dar als eine Petitio Principii."
>
> (...)

Ihre Anstrengungen, diese Schwierigkeiten zu überwinden, ergab die damals völlig neue und inzwischen grundlegend gewordene Definition der Stellen und der Bewertungen des Körpers $\mathbb{K}$. Dabei stützen sie sich auf die Möglichkeit, jede ganze algebraische Funktion mit einer Konstanten modulo eines Primideals zu identifizieren, die wiederum aus der Beschreibung der Primideale als Ideale ersten Grades folgt.

Dedekind und Weber erklären die Punkte der Riemannschen Fläche über die Primideale ganzer algebraischen Funktionen. Dabei sind die Verzweigungspunkte durch besondere Primideale gegeben, und zwar durch die (Prim-)Faktoren des sogenannten Verzweigungsideals.

Das Verzweigungsideal $\mathfrak{z}$ hat die Eigenschaft, daß seine Norm $N(\mathfrak{z})$ gleich der Diskriminante $\Delta_z(\mathbb{K})$ von $\mathbb{K}$ bezüglich z ist. D. h. die Linearfaktoren der Diskriminanten müssen mit den Normen der Primideale, in die das Verzweigungsideal faktorisiert, übereinstimmen.

Die Dedekind-Weber'sche Konstruktion des Verzweigungsideals erfolgt in mehreren Schritten. Zunächst ist eine Beziehung zwischen der Diskriminanten einer Basis $1, \theta, \ldots, \theta^{n-1}$ von $\mathbb{K}$ über $k(z)$ und der Ableitung $F'(\theta)$ der irreduziblen Gleichung (3), die θ definiert, herzustellen. So gilt

$$\Delta(1, \theta, \ldots, \theta^{n-1}) = \pm N(F'(\theta)).$$

Sei nun $z-c$ ein Linearfaktor der Diskriminanten von $\mathbb{K}$ und

$$(z-c) = \mathfrak{p}_1^{n_1} \cdot \mathfrak{p}_2^{n_2} \cdot \ldots \cdot \mathfrak{p}_s^{n_s},$$

mit $n_1 + n_2 + \ldots + n_s = n$ und $1 \leqq s \leqq n$, die „Primfaktorenzerlegung" des durch $z-c$ erzeugten Ideals in $\mathbb{D}$; so existiert eine ganze algebraische Funktion μ, die das Kongruenzensystem

$$\begin{cases} \mu \equiv c_1 \ (\mathrm{mod.}\ \mathfrak{p}_1), \\ \mu \equiv c_2 \ (\mathrm{mod.}\ \mathfrak{p}_2), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \mu \equiv c_s \ (\mathrm{mod.}\ \mathfrak{p}_s), \end{cases}$$

erfüllt, wobei $c_1, c_2, \ldots, c_s$ untereinander verschiedene Konstanten sind, und außerdem ist $1, \mu, \ldots, \mu^{n-1}$ eine Basis von $\mathbb{K}$ bezüglich $k(z)$.

Die Rolle der Konstanten $c_1, c_2, \ldots, c_s$ wird durch folgende Eigenschaft der Funktion μ beschrieben: Für eine beliebige Konstante a gilt die Kongruenz

$$\mu \equiv a \ (\mathrm{mod.}\ \mathfrak{p}_i),$$

dann und nur dann, wenn $a = c_i$ ist $(i = 1, 2, \ldots, s)$. Und $\mu - a$ kann nie in $\mathfrak{p}_i^2$ enthalten sein.

Ist $f(z,T)$ die irreduzible Gleichung n-ten Grades in T mit Koeffizienten in $k[z]$, der μ genügt, so ist ferner $n_i - 1$ die *höchste* Potenz von $\mathfrak{p}_i$, der $f'_\mu(z, \mu)$ angehört.

Hieraus folgt, daß $\Delta_z(\mathbb{K})$ nur solche Linearfaktoren $z-c$ enthalten kann, die durch eine Potenz $e > 1$ eines Primideals teilbar sind. Das Verzweigungsideal läßt sich nun als das Produkt der Primideale $\mathfrak{p}$ in $\mathbb{D}$, deren Norm $N(\mathfrak{p})$ in $\mathfrak{p}^e$ (mit $e > 1$) enthalten ist, bestimmen. Es gibt nur eine endliche Anzahl solcher Ideale, denn $(z-c)^{n-1}$ ist die höchste Potenz von $z-c$, die die Diskriminante $\Delta_z(\mathbb{K})$ teilt.

Mit der Grundlage der (aus der Dedekindschen Zahlentheorie entwickelten) Idealtheorie für die algebraischen Funktionen konnten Dedekind und Weber die Ideen Riemanns algebraisch erklären. Hierzu beschreiben sie erstmals die Punkte der Riemannschen Fläche als Äquivalenzklassen von Stellen des Körpers $\mathbb{K}$, wobei der Begriff der Riemannschen Fläche unabhängig von der Wahl der Variablen z ist. Im Gegensatz dazu ist die Bestimmung von z entscheidend für die Begriffe: der Dedekindsche Ring $\mathbb{D}$ der ganzen algebraischen Funktionen und seiner Ideale, Norm, Spur, Diskriminante, Ganzheitsbasen.

Wie diese Idee des Punktes der Riemannschen Fläche zustande kam, läßt sich aus einem Entwurf eines Briefes von R. Dedekind an H. Weber (aus der Zeit 1879–1880) entnehmen (vgl. S. 232):[33])

> „Ich denke mir, die ganze Theorie müßte von Anfang an noch mehr mit dem Streben nach invarianten Begriffen aufgebaut werden, und dabei komme ich immer mehr wieder auf Riemann zurück. Vor Allem müßte, wenn die algebraische Gleichung zwischen s und z gegeben ist (aus der sich der Körper Ω [$= \mathbb{K}$] entwickelt), jeder *Punct* deutlich charakterisiert und der Inbegriff $\mathfrak{T}$ aller dieser Puncte genau beschrieben werden, in der Weise, daß wirklich alle Functionen in Ω als einwerthige Ortsfunctionen in $\mathfrak{T}$ erscheinen. Dann scheint es zweckmäßig, Systeme von m Puncten (m-ecke) wie Producte von m Puncten zu bezeichnen und wieder miteinander zu multiplizieren; jedes Punctsystem ist Product von Punctpotenzen. Eine Function z, die *in* n Puncten $\mathfrak{a}$ (dem Zähler von z) verschwindet und in n Puncten $\mathfrak{b}$ (dem Nenner von z) unendlich wird, ist = const. $\frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{b}}$; n heißt die *Punctzahl* von z; zwei solcher Punctsysteme $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ (ebenso $\mathfrak{a}c, \mathfrak{b}c$) können äquivalent heißen; $\eta = \frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{b}}$ ist eine ganze Function von $z = \frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{b}}$, wenn $\mathfrak{b}'$ keine anderen Puncte enthält wie $\mathfrak{b}$. Ein Ideal $\mathfrak{a}$ in z ist der Inbegriff aller Functionen η, deren Nenner $\mathfrak{b}'$ keine anderen Puncte enthalten wie $\mathfrak{b}$ [sic], und deren Zähler $\mathfrak{a}'$ durch das Product der Grundpuncte von $\mathfrak{a}$ theilbar sind; ein Ideal $\mathfrak{a}$ ist daher (unabhängig von z) völlig bestimmt, sobald die voneinander verschiedenen Nennerpuncte (oder ihr durch kein Punctquadrat theilbares Product $\mathfrak{P}$) und das volle System seiner Grund- oder Nullpuncte gegeben ist; es kann daher Ideal in $\mathfrak{P}$ statt Ideal in z genannt werden.“

In der Fortsetzung ihrer Abhandlung verlassen nun Dedekind und Weber endgültig das zahlentheoretische Gebiet und konzentrieren sich voll auf algebraisch-geometrische Überlegungen, deren Hauptergebnis der Satz von Riemann–Roch ist. Dabei formulieren sie diesen Satz erstmals als eine Beziehung zwischen Dimension und Grad von Divisoren.

Literatur

AUBRY, A.: „Sur les travaux arithmétiques de Lagrange, de Legendre et de Gauss“, *L'ens. math.* **11** (1909), série I, S. 430–450.

BACHMANN, Paul: *Zahlentheorie,* 5 Bde., Teubner Leipzig, neue Auflage 1968.

BAUR, Ludwig: „Zur Theorie der Dedekind'schen Ideale“, *Math. Ann.* **32** (1888), S. 151–156.

[2]: „Zur Theorie der Functionen eines cubischen Körpers“, *Math. Ann.* **43** (1893), S. 505–520.

[3]: „Zur Theorie der algebraischen Functionen“, *J. f. Math.* **116** (1896), S. 167–170.

BIERMANN, Kurt-R.: „Gotthold Eisenstein“, *J. f. Math.* **214/215** (1964), S. 19–30.

[2]: „Richard Dedekind im Urteil der Berliner Akademie“, *Forsch. u. Fort.* **40** (1966), S. 301–302.

[3]: „Richard Dedekind“, *Dictionary of scientific biography,* Scribner, New York, Bd. 4, S. 1–5, 1971.

BOREWICZ, Senon I. und ŠAFAREVIČ, Igor R.: *Zahlentheorie,* Birkhäuser Verlag, Basel und Stuttgart 1966.

[33]) Dieses im Nachlaß ungenau datierte Schriftstück Dedekinds wurde uns freundlicherweise von Dr. Klaus Haenel (Handschriftenabteilung der Niedersächsischen Staats- und Universitätsbibliothek, Göttingen, Cod. Ms. Dedekind XIII, 2) zu 89) im Einverständnis mit Frau Ilse Dedekind zur Verfügung gestellt.

BOURBAKI, Nicolas: *Elemente der Geschichte der Mathematik*, Vandenhoeck & Ruprecht, Göttingen 1971.

BRILL, Alexander v. und NOETHER, Max: „Die Entwicklung der Theorie der algebraischen Funktionen in älterer und neuerer Zeit“, *Jb. dt. Math.-Ver.* **3** (1892–1893), S. 107–566.

CANTOR, Moritz (Hg.): *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik*, Teubner Stuttgart 1965, 4 Bde.

COURANT, Richard: „Bernhard Riemann und die Mathematik der letzten hundert Jahre“, *Die Naturwissenschaften* **14** (1926), S. 813–818 und S. 1265–1277.

DEDEKIND, Richard: „Sur la théorie des nombres entiers algébriques“, *Bull. sci. math. et astr.* **11** (1877), série I, S. 278–288, Bd. **1** (1877), série II, S. 17–41, 69–92, 144–164 und 207–248.

[2]: *Gesammelte mathematische Werke*, R. Fricke, E. Noether und Ö. Ore (Hgr.), 2 Bde., Chelsea 1969.

[3]: *Über die Theorie der ganzen algebraischen Zahlen*, Vieweg Braunschweig 1964.

DEDEKIND, Richard und WEBER, Heinrich: „Theorie der algebraischen Functionen einer Veränderlichen“, *J. f. Math.* **92** (1882), S. 181–290.

DEDEKIND, Richard: „Adresse der Deutschen Mathematiker-Vereinigung zum goldenen Doktorjubiläum des Herrn Geheimen Hofrat Prof. Dr.“, *Jb. dt. Math.-Ver.* **11** (1902), S. 206–207.

[2]: „Die Akademien zu Paris und Berlin über ...“, *Braunschw. Mag.* **22** (1916), S. 82–84.

DIEUDONNÉ, Jean: *Cours de géométrie algébrique*, 2 Bde., Presses Universitaires de France 1974.

DIRICHLET, Lejeune: *Vorlesungen über Zahlentheorie*, R. Dedekind (Hg.), 1. Aufl. 1863, 2. Aufl. 1871, 3. Aufl. 1879–1880, 4. Aufl. 1894, Chelsea 1968.

DUGAC, Pierre: *Richard Dedekind et les fondements des mathématiques*, Librairie Philosophique J. Vrin, Paris 1976.

EDWARDS, Harold M.: „The genesis of idealtheory“, *Arch. hist. ex. sci.* **23** (1980), S. 321–378.

EICHLER, Martin: *Einführung in die Theorie der algebraischen Zahlen und Funktionen*, Birkhäuser Verlag, Basel und Stuttgart 1963.

FROBENIUS, Georg: „Adresse an Herrn Richard Dedekind zum fünfzigjährigen Doktorjubiläum am 18. März 1902“, *Sb. Pr. Ak. Wiss. Berlin* 1902, S. 329–331.

[2]: „Adresse an Herrn Heinrich Weber zum fünfzigjährigen Doktorjubiläum am 19. Februar 1913“, *Sb. Pr. Ak. Wiss. Berlin* 1913, S. 248–249.

GAUSS, Carl F.: *Untersuchungen über höhere Arithmetik*, H. Maser (Hg.), Chelsea, New York 1965.

GRÖBNER, Wolfgang: *Algebraische Geometrie I*, Bibliographisches Institut, Mannheim 1968.

HASSE, Helmut: *Zahlentheorie*, Akademie-Verlag, Berlin 1949.

HENSEL, Kurt und LANDSBERG, Georg: *Theorie der algebraischen Funktionen einer Variablen und ihre Anwendung auf algebraische Kurven und abelsche Integrale*, Chelsea, New York 1965.

HILBERT, David: „Die Theorie der algebraischen Zahlkörper“, *Jb. dt. Math.-Ver.* **4** (1894/1895), S. 175–546 + xviii.

KLEIN, Felix: *Vorlesungen über die Entwicklung der Mathematik im 19. Jahrhundert*, Springer, Berlin, Heidelberg, New York 1979.

[2]: „Riemann und seine Bedeutung für die Entwicklung der modernen Mathematik“, *Jb. dt. Math.-Ver.* **4** (1894/1895), S. 71–87.

KNESER, Adolf: „Arithmetische Begründung einiger algebraischer Fundamentalsätze“, *J. f. Math.* **102** (1888), S. 20–55.

[2]: „Leopold Kronecker, *Jb. dt. Math.-Ver.* **33** (1925), S. 210–228.

KRONECKER, Leopold: „Grundzüge einer arithmetischen Theorie der algebraischen Größen“, *J. f. Math.* **92** (1882), S. 1–122.

[2]: „Ein Fundamentalsatz der allgemeinen Arithmetik“, *J. f. Math.* **100** (1887), S. 490–510.

KRULL, Wolfgang: *Idealtheorie*, 2. Aufl. Springer, Berlin, Heidelberg, New York 1968.
KUMMER, Ernst Eduard: „Die numeris complexis qui radicibus unitatis et numeris integri realibus constant", *J. math. pur. et appl.* **12** (1847), S. 185–212, 1. Veröff. 1844.
[2]: „Zur Theorie der komplexen Zahlen", *J. f. Math.* **35** (1847), S. 319–326.
[3]: „Gedächtnisrede auf Gustav Peter Lejeune Dirichlet", *Abh. Kö. Ak. Wiss. Berlin* 1860, S. 1–36.
LAMPE, Emil: „Nachruf auf Ernst Eduard Kummer", *Jb. dt. Math.-Ver.* **3** (1894), S. 13–28.
LANDAU, Edmund: „Richard Dedekind", *Nachr. Kö. Ges. Wiss. Göttingen*, Gesch. Mitt. 1917, S. 50–70.
LOREY, Wilhelm: *Das Studium der Mathematik an den deutschen Universitäten seit Anfang des 19. Jahrhunderts*, Teubner, Leipzig und Berlin 1916.
MINKOWSKI, Hermann: „Peter Gustav Lejeune Dirichlet und seine Bedeutung für die heutige Mathematik", *Jb. dt. Math.-Ver.* **14** (1905), S. 149–163.
NEUENSCHWANDER, E.: „Der Nachlaß von Casorati (1835–1890) in Pavia", *Arch. hist. ex. sci.* **19** (1978), S. 1–89.
NEUMANN, Olaf: „Bemerkungen aus heutiger Sicht über Gauß' Beiträge zu Zahlentheorie, Algebra und Funktionentheorie", *NTM* **16** (1979), S. 22–39; fortgesetzt in: „Zur Genesis der algebraischen Zahlentheorie", *NTM* **17** (1980), 1, S. 32–48 und *NTM* **18** (1980) 2, S. 38–58.
NOETHER, Emmy: „Die arithmetische Theorie der algebraischen Funktionen einer Veränderlichen, in ihrer Beziehung zu den übrigen Theorien und zu der Zahlentheorie", *Jb. dt. Math.-Ver.* **28** (1919), S. 182–203.
[2]: „Abstrakter Aufbau der Idealtheorie in algebraischen Zahl- und Funktionenkörpern", *Math. Ann.* **96** (1927), S. 26–61.
PURKERT, Walter: „Zur Genesis des abstrakten Körperbegriffs", *NTM* **8** (1973), 1, S. 23–27 und *NTM* **10** (1973), 2, S. 8–20.
RIEMANN, Bernhard: *Grundlagen für eine allgemeine Theorie der Functionen einer veränderlichen komplexen Größe*, Inauguraldissertation, Göttingen 1851.
[2]: „Theorie der Abelschen Functionen", *J. f. Math.* **54** (1857), S. 115–155.
SAMUEL, Pierre: *Teoría algebraica de números*, Omega, Barcelona 1972.
SCHOLZ, Erhard: *Geschichte des Mannigfaltigkeitsbegriffs von Riemann bis Poincaré*, Birkhäuser Verlag, Boston, Basel, Stuttgart 1980.
SCHOENEBERG, Bruno: „Heinrich Weber", *Dictionary of scientific biography*, Scribner, New York, Bd. 14, S. 202–203, 1976.
STROBL, Walter: *Desarrollo histórico y sistemático de la teoría aritmética de las funciones algebráicas de Dedekind y Weber*, Tesis de Licenciatura, Madrid 1980.
STRUIK, Dirk, J.: *Abriß der Geschichte der Mathematik*, 4. Aufl., Vieweg, Braunschweig 1965.
STULOFF, Nikolaus: „Richard Dedekind", *NDB* **3** (1957), S. 552 f.
VOSS, A.: „Heinrich Weber", *Jb. dt. Math.-Ver.* **23** (1914), S. 431–444.
WAERDEN, B. L. van der: „Die Algebra seit Galois", *Jb. dt. Math.-Ver.* **68** (1966), S. 155–165.
[2]: *Algebra*, Springer, Berlin, New York, Heidelberg, Bd. 1, 8. Aufl. 1971, Bd. 2, 5. Aufl. 1967.
WEBER, Heinrich: „Leopold Kronecker", *Jb. dt. Math.-Ver.* **2** (1892), S. 5–32.
[2]: „Untersuchungen über die allgemeinen Grundlagen der Galois'schen Gleichungstheorie", *Math. Ann.* **43** (1893), S. 521–549.
[3]: *Lehrbuch der Algebra*, 3 Bde., 1. Aufl. 1898, 3. Aufl. Chelsea, New York.
WEYL, Hermann: *Algebraische Zahlentheorie*, Bibliographisches Institut, Mannheim 1966.
ZINCKE, Hans (gen. SOMMER): „Erinnerungen an Richard Dedekind", *Braunschw. Mag.* **22** (1916), S. 73–81.